GARA DI MATEMATICA ON-LINE (14/10/2024)
SOLUZIONI

PROBLEMA 1 [153]

Siccome $576 = 2^6 \cdot 3^2$, tutti i fattoriali maggiori di $8! = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ sono divisibili per 576. Per calcolare il resto ci basta calcolare: $(1!+2!+3!+\ldots+7!) \bmod 576 = (1+2+6+24+120+720+5040) \bmod 576 = 5913 \bmod 576 = 153$.

PROBLEMA 2 [1469]

Dalle prime due relazioni si deduce che $x \neq 2$ e $y \neq 2$ e quindi sia x che y saranno dispari. Da ciò si conclude che deve necessariamente essere $x+y-124=2$ cioè $x+y=126$. Cerchiamo una coppia di numeri primi che renda primi anche $x+2y$ e $6x+y$ in cui uno dei due valori sia il più piccolo possibile, in modo da rendere minimo xy.
Se uno valesse 3 l'altro sarebbe 123 che non è primo. Se uno valesse 5 l'altro sarebbe 121 che non è primo (11^2). Se uno valesse 7 l'altro sarebbe 119 che non è primo ($7 \cdot 17$). Se uno valesse 11 l'altro sarebbe 115 che non è primo ($5 \cdot 23$). Se uno valesse 13 l'altro sarebbe 113 che è primo. Verifichiamo se $x+2y$ e $6x+y$ sono primi anche loro: usando $x=13$ e $y=113$ si ha $x+2y=239$ che è primo e $6x+y=191$ che è primo pure lui.
La soluzione cercata è $xy=1469$

PROBLEMA 3 [36]

Se x è il numero totale di schede, il rapporto tra il numero dei SI dopo la seconda parte dello spoglio e il totale delle schede scrutinate è: $\dfrac{\frac{33}{100}\cdot\frac{30}{100}x+\frac{45}{100}\frac{10}{100}x}{\frac{40}{100}x}=\dfrac{36}{100}$ pari al 36%.

PROBLEMA 4 [315]

$n=(k-2)+(k-1)+k+(k+1)+(k+2)=5k$, e quindi n è multiplo di 5.
$n=(h-2)+(h-1)+h+(h+1)+(h+2)+(h+3)=6h+3$, e quindi n è multiplo di 3, ma non di 6.
$n=(p-3)+(p-2)+(p-1)+p+(p+1)+(p+2)+(p+3)=7p$, e quindi n è multiplo di 7.
$n=3\cdot5\cdot7\cdot a=105a$ con a non pari. Il primo valore possibile è $n=105\cdot3=315$

PROBLEMA 5 [14]

Calcoliamo la probabilità opposta, cioè che i quattro giocattoli siano stati assegnati a tutti e tre i ragazzi. Uno di loro dovrà averne vinti due. Supponiamo che i ragazzi siano A, B e C. Scelto in 3 modi colui che ne vincerà 2 restano $\frac{4!}{2}=12$ modi per assegnare i giochi (anagramma della stringa $AABC$ supponendo di aver scelto A come vincitore di due giochi). La probabilità è $P=\frac{12\cdot3}{3^4}=\frac{4}{9}$. La probabilità opposta è $\overline{P}=\frac{5}{9}$.
La soluzione richiesta è $5+9=14$.

PROBLEMA 6 [6720]

Facciamo intanto sedere i cinque amici lasciando i tre spazi richiesti: $AxxxBxxxCxxxDxxxE$ ci restano 3 sedie che possiamo mettere prima della A, tra A e B ecc. ecc. Abbiamo quindi $C^*_{6,3}=\binom{6+3-1}{3}=\binom{8}{3}=56$ modi per completare la distribuzione, senza dimenticare che possiamo permutare in $5!$ modi i 5 amici.
In totale abbiamo $56\cdot5!=6720$ distribuzioni possibili.

PROBLEMA 7 [14]

Dai dati abbiamo: $P(oro\,|\,rosso)=\frac{1}{2}$ e $P(oro\,|\,azzurro)=\frac{2}{5}$. Scegliendo il sacco a caso $P(rosso)=P(azzurro)=\frac{1}{2}$. Utilizzando il Teorema di Bayes:

$$P(rosso\,|\,oro)=\frac{P(oro\,|\,rosso)P(rosso)}{P(oro\,|\,rosso)P(rosso)+P(oro\,|\,azzurro)P(azzurro)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{5}{9}.$$

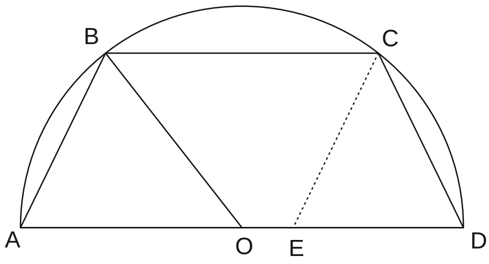
La soluzione richiesta è $5+9=14$.

PROBLEMA 8 [30]

Sia x la distanza tra le due abitazioni, v_T la velocità di Tommaso e v_K la velocità di Klaus.

Dopo un certo tempo t_1 Tommaso avrà percorso $16\ \text{km}$ e Klaus $x-16\ \text{km}$ cioè $16=v_T t_1$ e $x-16=v_K t_1$. Facendo il rapporto tra le due relazioni abbiamo: $\dfrac{v_T}{v_K}=\dfrac{16}{x-16}$. Al secondo incrocio, al tempo t_2 avremo che Tommaso ha percorso $x+18\ \text{km}$, mentre Klaus $2x-18\ \text{km}$ e quindi $x+18=v_T t_2$ e $2x-18=v_K t_2$. Facendone il rapporto abbiamo $\dfrac{v_T}{v_K}=\dfrac{x+18}{2x-18}$. Uguagliando le due espressioni ottenute si ha $\dfrac{16}{x-16}=\dfrac{x+18}{2x-18}$. Risolvendo l'equazione si ottiene come unica soluzione accettabile $x=30\ \text{km}$.

PROBLEMA 9 [350]



Riferendoci alla figura a fianco, sia $ABCD$ il trapezio e O il centro della semicirconferenza.

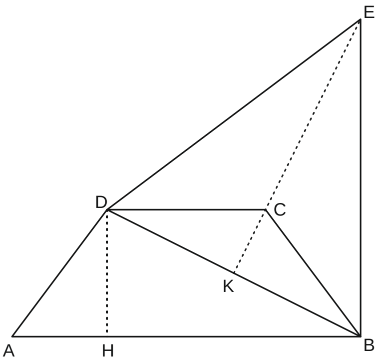
Tracciamo la parallela al lato AB passante per C e sia E il punto di intersezione sul diametro AD.

Osserviamo che i triangoli ABO e ECD sono simili e quindi, detta x la misura di BC sia ha

$AO:AB=DC:ED$

cioè $200:100=100:(400-x)$ da cui otteniamo $x=350\ \text{cm}$.

PROBLEMA 10 [62]



Costruito il punto E ortocentro del triangolo BCD, tracciamo DH, come in figura, l'altezza del trapezio.

Osserviamo che $AH=3$ e quindi $DH=4$ per la nota terna pitagorica $(3,4,5)$.

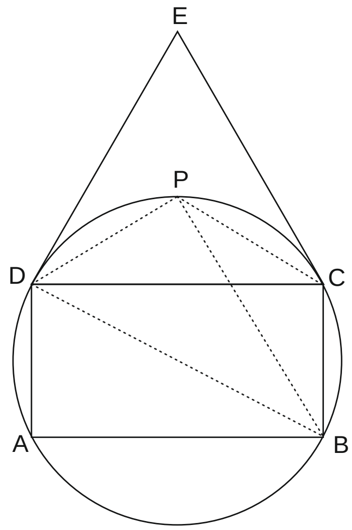
$DB=\sqrt{(11-3)^2+4^2}=\sqrt{80}$.

Ora i triangoli DHB e BEK risultano essere simili, in quanto hanno gli stessi angoli.

$DH:HB=KB:EK$ e quindi $EK=\dfrac{HB\cdot KB}{DH}=\dfrac{8\cdot\dfrac{\sqrt{80}}{2}}{4}=\sqrt{80}$.

$$A_{ABED}=A_{ABD}+A_{DEB}=\frac{11\cdot 4}{2}+\frac{\sqrt{80}\cdot\sqrt{80}}{2}=22+40=62\ \text{cm}^2$$

PROBLEMA 11 [900]

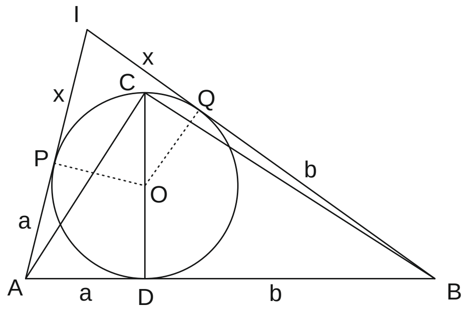


Osserviamo che gli angoli $P\hat{D}C=P\hat{C}D=P\hat{B}D$ sono tutti di $30°$ (l'ultimo per gli angoli alla circonferenza.

Di conseguenza $P\hat{D}B=60°$ e quindi $B\hat{D}C=30°$.

$BD=2\cdot BC=2\cdot 45=90\ \text{cm}=900\ \text{mm}$.

PROBLEMA 12 [11]



Come prima cosa calcoliamo la misura dell'ipotenusa $AB = \sqrt{35^2 + 12^2} = 37$

Sfruttando il Primo Teorema di Euclide calcoliamo AD (e per differenza DB):

$AD = a = \frac{AC^2}{AB} = \frac{144}{37}$ e quindi $DB = b = 37 - \frac{144}{37} = \frac{1225}{37}$.

Per il secondo Teorema di Euclide $CD = \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{\frac{144}{37} \cdot \frac{1225}{37}} = \frac{420}{37}$.

$OD = \frac{210}{37}$

Sia $x = IP = IQ$.

La circonferenza è iscritta nel triangolo ABI, il raggio $OD = \frac{A_{ABI}}{p_{ABI}}$

$$p_{ABI} = \frac{1}{2}(2a + 2b + 2x) = a + b + x = 37 + x$$

$$A_{ABI} = \sqrt{(37+x)(37+x-37)(37+x-a-x)(37+x-b-x)} = \sqrt{(37+x)(x)(37-a)(37-b)} = \sqrt{(37+x)(x)(b)(a)}$$

$$= \sqrt{(37+x)(x)(b)(a)} = \frac{420}{37}\sqrt{x(37+x)}$$

Risolviamo ora l'equazione:

$$\frac{210}{37} = \frac{\frac{420}{37}\sqrt{x(37+x)}}{37+x}$$

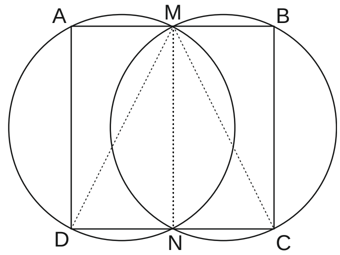
Che possiamo semplificare nella forma

$\sqrt{37+x} = 2\sqrt{x}$. Elevando al quadrato si ottiene $37 + x = 4x$ cioè $x = \frac{37}{3}$

Il rapporto cercato vale: $\frac{2p_{ABI}}{AB} = \frac{2\left(37 + \frac{37}{3}\right)}{37} = \frac{8}{3}$

La risposta richiesta è $8 + 3 = 11$.

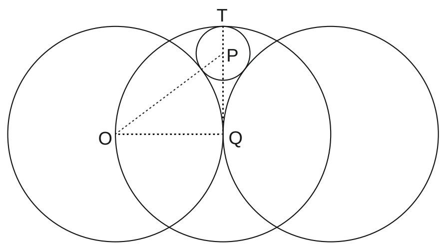
PROBLEMA 13 [2236]



Osservando la figura a fianco riportata se $ABCD$ è il quadrato, M ed N i punti medi dei lato AB e DC, DM risulta essere il diametro cercato mentre $MN = 2\ \mathrm{m}$ e $AM = 1\ \mathrm{m}$.

Di conseguenza, $DM = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}\ \mathrm{m} = 2236{,}1\ \mathrm{mm}$.

PROBLEMA 14 [250]



Unendo i centri delle circonferenze come in figura e detto x il diametro della circonferenza più piccola, si ottiene un triangolo che ha i lati: $OQ = \frac{1}{2}$, $OP = \frac{1}{2} + x$ e $PQ = \frac{1}{2} - x$. Applicando il Teorema di Pitagora si ha $OP^2 = OQ^2 + PQ^2$ cioè $\left(\frac{1}{2} + x\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - x\right)^2$ che risolta porta a determina $x = \frac{1}{4}\ \mathrm{m} = 250\ \mathrm{mm}$.

PROBLEMA 15 [5]
Siano da 1 a 13 i piatti ordinabili. Una delle possibili strategie è la seguente:

GIORNO	Logico 1	Logico 2	Logico 3	Logico 4	Logico 5	Piatti identificati
1	1	2	2	3	3	Identifico **1** perché è l'unico diverso
2	4	5	5	6	6	Identifico **4** perché è l'unico diverso
3	2	8	8	5	7	Identifico **2** dal confronto con il primo giorno (e di conseguenza anche **3**) Identifico **5** dal confronto con il secondo giorno (e di conseguenza anche **6**) Identifico **8** perché è l'unico piatto uguale (e di conseguenza **7** per esclusione)
4	9	10	10	11	11	Identifico **9** perché è l'unico diverso
5	10	12	13	13	13	Identifico **13** perché è l'unico piatto uguale, **10** e di conseguenza **11** per confronto con il giorno precedente; **12** per esclusione

PROBLEMA 16 [1024]

$$p(x)=\prod_{k=1}^{10}\left(1+x^{2^k}\right)=\left(1+x^2\right)\left(1+x^4\right)\left(1+x^8\right)\ldots\left(1+x^{1024}\right)=\frac{(1-x)(1+x)\left(1+x^2\right)\left(1+x^4\right)\left(1+x^8\right)\ldots\left(1+x^{1024}\right)}{(1-x)(1+x)}=$$

$$=\frac{x^{2048}-1}{x^2-1}$$

$$p(1000)=\frac{\left(10^3\right)^{20248}-1}{\left(10^3\right)^2-1}=\frac{10^{6144}-1}{10^6-1}.$$

Ora il numeratore della frazione è una sequenza di 6144 cifre 9, mentre il denominatore è 999999.
Nella divisione rimarranno esattamente $6144:6=1024$ cifre 1.

PROBLEMA 17 [7267]
Per quali valori $p(x)=0$? Risolviamo l'equazione $x^2+6x+6=0$: $x_{1,2}=-3\pm\sqrt{3}$.
Quindi $p\left(-3\pm\sqrt{3}\right)=0$.
Cerchiamo per quali valori reali $x^2+6x+6=-3\pm\sqrt{3}$, cioè risolviamo l'equazione $x^2+6x+9\pm\sqrt{3}=0$ che ha soluzioni $x=-3\pm\sqrt{\pm\sqrt{3}}$. Le soluzioni reali si hanno solo nel caso in cui sotto radice abbiamo un valore positivo, quindi abbiamo due sole soluzioni reali: $x=-3\pm\sqrt[4]{3}$ il cui prodotto moltiplicato per 1000 vale: $1000\left(-3+\sqrt[4]{3}\right)\left(-3-\sqrt[4]{3}\right)=1000\left(9-\sqrt{3}\right)\cong 7267,9$

PROBLEMA 18 [1700]

$$\left(p(x)\right)^4=\left(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{2024}\right)\left(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{2024}\right)\left(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{2024}\right)\left(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{2024}\right).$$

Sia x^α la potenza che prendo dalla prima parentesi, x^β dalla seconda, x^γ dalla terza e x^δ dalla quarta.
Dovrà accadere che $\alpha+\beta+\gamma+\delta=99$, che altro non è che il modello delle combinazioni con ripetizione. Il coefficiente cercato sarà dunque $\binom{99+4-1}{99}=\binom{102}{99}=171700$.

PROBLEMA 19 [62] (10)
Dalla prima relazione possiamo scrivere che $(1+x)^2=\frac{13}{37}\left(1+x^2\right)$ che sviluppata diventa $1+2x+x^2=\frac{13}{37}\left(1+x^2\right)$, cioè $2x=\left(\frac{13}{37}-1\right)\left(1+x^2\right)$ e quindi $x=-\frac{12}{37}\left(1+x^2\right)$.

$$\frac{(1+x)^3}{1+x^3}=\frac{(1+x)^3}{(1+x)(1-x+x^2)}=\frac{(1+x)^2}{1+x^2-x}=\frac{(1+x)^2}{\left(1+x^2\right)+\frac{12}{37}\left(1+x^2\right)}=\frac{\frac{13}{37}\cancel{\left(1+x^2\right)}}{\frac{49}{37}\cancel{\left(1+x^2\right)}}=\frac{13}{49}$$

La soluzione cercata è $13+49=62$.

PROBLEMA 20 [13]

Dobbiamo calcolare $a^2+b^2+c^2+d^2$ sapendo che:

$$\begin{cases} ab+c+d=3 \text{ (I)} \\ bc+d+a=5 \text{ (II)} \\ cd+a+b=2 \text{ (III)} \\ da+b+c=6 \text{ (IV)} \end{cases}$$

Calcoliamo $I+II-III-IV$: $ab+bc-cd-da+2d-2b=0$ che possiamo anche scrivere $a(b-d)+c(b-d)-2(b-d)=0$ cioè $(a+c-2)(b-d)=0$.

Non può essere $b=d$ in quanto le equazioni I e IV diventerebbero $ab+c+b=3$ e $ab+c+b=6$, quindi $a+c=2$.

Calcoliamo $I+II$: $ab+bc+a+c+2d=8$. Inserendo quanto appena trovato, abbimo: $2b+2+2d=8$, cioè $b+d=3$.

Calcoliamo $I-II$: $ab-bc+c-a=-2$ che possiamo anche scrivere nelle forma $b(a-c)-(a-c)=-2$ cioè $(b-1)(a-c)=-2$ e quindi $a-c=\frac{-2}{b-1}$.

Calcoliamo $III-IV: cd-da+a-c=-4$ che analogamente a prima possiamo trasformare in $a-c=\frac{4}{d-1}$.

Uguagliando le due relazioni e mettendo a sistema con quanto trovato prima si ha

$\begin{cases} \frac{4}{d-1}=-\frac{2}{b-1} \\ b+d=3 \end{cases}$ che semplificato porta a $\begin{cases} 2b+d=3 \\ b+d=3 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} b=0 \\ d=3 \end{cases}$

Sostituendo abbiamo quindi

$\begin{cases} a-c=2 \\ a+c=2 \end{cases}$ cioè $\begin{cases} a=2 \\ c=0 \end{cases}$.

$a^2+b^2+c^2+d^2=2^2+3^2=13$.