Istruzioni Generali

- Per tutti i problemi(1) occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999, o comunque una successione di 4 cifre. Occorre sempre e comunque compilare tutte le 4 cifre, eventualmente aggiungendo zeri iniziali.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo oppure il problema non ha esattamente una soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, si indichino le ultime quattro cifre della sua parte intera—cioè, il resto della divisione con 10^4; in altre parole, in ordine da sinistra a destra, la cifra delle migliaia, seguita da quella delle centinaia, poi quella delle decine, infine le unità.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera.
- Si ricorda che
  a) la *parte intera* di un numero reale x è il più grande intero minore o uguale ad x; si scrive $\lfloor x \rfloor$—ad esempio $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor 10 \rfloor = 10$, $\left\lfloor \sqrt{17} \right\rfloor = 4$;
  b) il *successivo* del numero intero n è il numero $n + 1$ e i due numeri sono detti *consecutivi*;
  c) un numero *naturale* è 0 oppure il successivo di numero naturale—in altre parole, è un numero intero positivo o nullo;
  d) il *fattoriale* del numero intero n è il prodotto di tutti i numeri interi da 1 fino a n; si scrive $n!$—ad esempio $1! = 1$, $5! = 120$, $6! = 720$;
  e) un *quadrato perfetto* è un numero intero che è quadrato di un numero intero—ad esempio 16 è un quadrato perfetto, 22 non è un quadrato perfetto;
  f) una lista è *palindroma* se, letta da destra a sinistra, produce la stessa lista—ad esempio `radar` è palindroma; `drone` non è palindroma; 2020 non è palindromo; 2002 è palindromo.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:
  $\sqrt{2} = 1{,}4142$ $\sqrt{3} = 1{,}7321$ $\sqrt{5} = 2{,}2360$ $\pi = 3{,}1415$.

Il gioco di imitazione(2)

Prima della gara, abbiamo proposto 21 problemi all'IA che è riuscita a fornire risposte. Tra poco riproponiamo a voi gli stessi 21 problemi. Quello che ***dovete*** fare, invece di indicare la risposta richiesta dalla domanda alla fine del testo del problema, è produrre il valore assoluto della differenza tra la risposta numerica di , che è sempre riportata subito dopo la domanda, e la risposta numerica che voi ritenete sia quella corretta.

Ad esempio, l'IA ha risposto 0007 al primo problema. Se voi calcolate che la risposta al primo problema è invece 0071, dovete consegnare la risposta 0064 dato che il valore assoluto della differenza $|7 - 71|$ è 64. Se, d'altro canto, calcolate che la risposta al primo problema è 0007—cioè, siete in accordo con la risposta di —, dovete consegnare la risposta 0000 dato che il valore assoluto della differenza $|7 - 7|$ è 0.

Per ogni problema, la risposta data dall'IA viene indicata, nell'angolo in basso a destra del testo del problema, come indicato anche qui in fondo.

: 0007

(1) L'autore di un problema è indicato prima del testo.

(2) Da un'idea di Alan Turing, esposta nell'articolo ***Computing Machinery and Intelligence***, apparso sulla rivista *Mind* nell'ottobre 1950.

Gara a Squadre Miste – Testi dei problemi

Unione Matematica Italiana
Università di Genova

1. Interruttori
Carlo Càssola

In una stanza ci sono otto interruttori che comandano la stessa lampada. La lampada si accende solo se tutti gli otto interruttori sono sulla posizione ON. Sugli interruttori non c'è scritto niente, perciò è impossibile sapere quali sono su ON e quali su OFF. Una persona entra nella stanza e sa che quattro interruttori sono su ON e quattro su OFF, ma non sa quali siano. Per accendere la luce la persona procede in questo modo: sceglie quattro interruttori a caso e cambia il loro stato. Qual è la probabilità che accenda la luce al primo tentativo? [*Dare come risposta la probabilità moltiplicata per* 10000.] : 0007

2. Schema
Sandro Campigotto

Scrivi i numeri dispari secondo il seguente schema: nella prima riga scrivi il numero 1; nella seconda riga scrivi i due numeri dispari successivi 3 e 5; nella terza i tre numeri dispari seguenti 7, 9 e 11, e così via. Quale numero scrivi all'inizio della 97-esima riga? : 9313

3. Possibilità
Benedetta Demoro

Un parallelepipedo a base quadrata ha spigoli tutti di misura intera in cm; in particolare la sua altezza ha lunghezza $(p^2+p+4)\,\mathrm{cm}$, con p numero intero non negativo. Il valore del volume del parallelepipedo in cm^3 è uguale a quello dell'area in cm^2 di un quadrato coi lati di misure intere. Quali sono le possibili altezze del parallelepipedo? [*Dare come risposta la somma dei valori in* cm *delle altezze possibili.*] : 0084

4. Triangoli e rettangoli
Giuseppe Rosolini

Preso un rettangolo $ABCD$ con AB lungo 30 cm e BC lungo 12 cm, traccia le due diagonali AC e BD e i due segmenti che congiungono i punti medi di lati opposti: il segmento EF che coingiunge il punto medio E di AB e il punto medio F di CD; il segmento GH che congiunge il punto medio G di BC e il punto medio H di DA. Poi dividi ciascuno dei lati del rettangolo in sei parti uguali: marca sul lato AB i segmenti $AP_1 = P_1P_2 = P_2E = EP_3 = P_3P_4 = P_4B$; fai la stessa cosa per il lato CD usando i punti Q_1, Q_2, Q_3 e Q_4, così come per gli altri due lati BC e DA, usando rispettivamente i quattro punti R_1, R_2, R_3 e R_4, e i quattro punti S_1, S_2, S_3 e S_4. Infine traccia da ciascun di questi 16 punti il segmento perpendicolare al lato su cui sta e che lo congiunge alla più vicina diagonale del rettangolo. Quanti triangoli hai disegnato? : 0016

5. Brevissimo
Carlo Càssola

Quanti sono i divisori positivi di 246246? : 0048

6. Somme periodiche
Lorenzo Mazza

Qual è il massimo numero di cifre consecutive della parte decimale di $\frac{1}{26}$ che sommate tutte insieme danno come risultato 3000? : 0333

7. Cubetti
Carlo Càssola

Ci sono 630 cubetti identici. Usandoli tutti, li puoi disporre in modo da formare un parallelepipedo. Quanti parallelepipedi diversi puoi ottenere? : 0048

8. Al cinema
Giuseppe Rosolini

La sala cinematografica solo con poltrone numerate è quasi completa, restano quattro posti liberi con i rispettivi biglietti ancora disponibili. Il film sta per iniziare. Arriva uno spettatore che compra un biglietto, entra in sala e si siede nella prima poltrona libera che vede senza controllare che posto è indicato sul suo biglietto. Uno dopo l'altro, arrivano altri tre spettatori, sanno che la sala è quasi piena e il film sta per iniziare. Ciascuno, rispettoso delle regole, decide perciò di sedere al posto indicato sul proprio biglietto a patto che la poltrona sia libera. Altrimenti si adatterà a sedere a caso. Qual è la probabilità che l'ultimo spettatore si sieda al posto indicato sul suo biglietto? [*Dare come risposta la probabilità moltiplicata per* 10000.] : 9375

9. Spezzate
Rodolfo Assereto

Su un foglio di carta quadrettata molto grande, il lato di ciascun quadretto è lungo la lunghezza u. Traccia sul foglio due assi cartesiani in modo che ciascun asse sia sovrapposto ai segmenti prestampati sul foglio e che, dall'intersezione degli assi—che deve dunque essere il vertice di un quadretto prestampato—, ci siano almeno 2025 quadretti verso ciascuno dei quattro bordi del foglio. Le coordinate sono calcolate rispetto all'unità di lunghezza u. Puoi tracciare segmenti con la matita congiungendo un vertice di un quadretto con un altro seguendo i lati dei quadretti prestampati sul foglio e fare disegni segmentati seguendo queste regole:

- se termini su un punto individuato da una coppia con prima coordinata pari e la seconda dispari, svolti a destra rispetto alla direzione da cui sei arrivato e prosegui la traccia di 1 lato;
- se termini su un punto individuato da una coppia con prima coordinata dispari e la seconda pari, svolti a sinistra rispetto alla direzione da cui sei arrivato e prosegui la traccia di 1 lato;
- altrimenti prosegui la traccia di 1 lato nella direzione da cui sei arrivato.

Scegli a caso il vertice di un quadretto all'interno della circonferenza di raggio 3 u e centro l'origine degli assi (il vertice deve essere interno, non l'intero quadretto) e traccia un segmento di lunghezza u seguendo a caso uno dei segmenti prestampati, poi prosegui rispettando le tre regole. Qual è la probabilità che la traccia passi—entro un numero finito di tracce ed eventualmente uscendo dalla circonferenza, ma non dal foglio–per l'origine degli assi? [*Dare come risposta la probabilità moltiplicata per* 10000.] : 0833

10. Breve *Carlo Càssola*

Quanti numeri interi fra 1 e 2025 sono divisibili per 19, come ad esempio 38, oppure contengono al loro interno le cifre 1 e 9 scritte di seguito, come ad esempio in 1192? ✎: 0114

11. Separati *Luca Renzi*

Considera la ***separazione*** di due cifre c e d in un numero: il valore assoluto della differenza tra gli esponenti delle due potenze di 10 di cui le due cifre sono i fattori. In altre parole, il numero delle cifre che separano c e d aumentato di 1.

Prendi ora un numero di otto cifre in cui compaiono almeno tre zeri, nessuno dei quali (in prima o) in ultima posizione e disegna su un foglio un parallelogramma come segue: la separazione tra la prima cifra 0 e la seconda cifra 0 è la misura in centimetri di due lati paralleli del parallelogramma; la separazione tra la seconda cifra 0 e la terza cifra 0 è la misura in centimetri degli altri due lati paralleli.

Ad esempio, preso il numero 12300405 la separazione tra il primo ed il secondo 0 è 1, quindi il primo lato sarà di 1 cm; la separazione tra il secondo ed il terzo 0 è 2, di conseguenza il secondo lato sarà lungo 2 cm.

Per scegliere le ampiezze degli angoli del parallelogramma si considera il prodotto p dei numeri che si leggono prima del primo zero e dopo il terzo—nell'esempio sopra, $p = 123 \cdot 5 = 615$. Le due ampiezze in gradi n e m degli angoli del parallelogrammo devono essere numeri interi positivi che hanno prodotto p. Quanti numeri di otto cifre possono generare rettangoli? ✎: 0060

12. Tre dadi *Carlo Càssola*

Qual è la probabilità che, tirando tre dadi non truccati, il numero di uno qualunque dei tre dadi sia uguale alla somma degli altri due? [*Dare come risposta la probabilità moltiplicata per* 10000.] ✎: 0693

13. Successione, I *Giuseppe Rosolini*

Considera una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ che verifica le seguenti proprietà

- $a_1 = 1$
- $a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n = n(n+1)a_n$ per $n \geq 2$

Quanto vale $\dfrac{1}{a_{2025}}$? ✎: 0001

14. Triangoli *Lorenzo Mazza*

Una ***triangolazione*** è una suddivisione di una figura piana in tanti triangoli. Considera la seguente triangolazione del triangolo equilatero ABC: è suddiviso in 999 triangoli ottenuti come segue. Un triangolo ha un vertice in B, un altro è il punto P_1 sul lato BC, il terzo è il punto P_2 sul lato AB; un altro triangolo, con area doppia di quella di BP_1P_2, ha un vertice in P_1, un altro in P_2, il terzo vertice è il punto P_3 sul lato BC; un altro triangolo, con area tripla di quella di BP_1P_2, ha un vertice in P_2, un altro in P_3, il terzo è il punto P_4 sul lato AB. E così proseguendo, finché si arriva al 999-esimo triangolo, con area 999 volte quella di BP_1P_2, che ha un vertice in P_{998} sul lato AB, e gli altri due vertici sono C e A. La lunghezza del segmento BP_1 è 20 m. Qual è la lunghezza del segmento AP_{998} in cm? ✎: 0008

15. Corto *Carlo Càssola*

Quanti sono i numeri naturali inferiori a 10000 in cui la somma delle cifre è un multiplo di 6? ✎: 1666

16. Successione, II *Leonardo Cimino*

Considera la successione

$$\begin{cases} a_0 = 3 \\ a_1 = 1 \\ a_{n+2} = \max(a_{n+1}, a_n) - 2\min(a_{n+1}, a_n) \end{cases}$$

Qual è il valore di a_{100}? ✎: 0603

17. Nel triangolo rettangolo *Carlo Càssola*

Nel triangolo ABC, rettangolo nel vertice A, l'ipotenusa BC è lunga 65 cm, il cateto AC è lungo 16 cm. Si costruiscono, esternamente al triangolo, il quadrato $ANMB$ sul cateto e il quadrato $BQPC$ sull'ipotenusa. Qual è l'area del quadrilatero $AMQP$ in cm^2? ✎: 0256

18. Operazioni *Simone Muselli*

Per generare successioni, prima si sceglie a caso una cifra c positiva e poi le si applicano delle operazioni, in sequenza, scelte a caso ogni volta tra le tre seguenti: aggiungere l'addendo 3; moltiplicare per il fattore 4; elevare alla potenza 5. Ad esempio, si può generare la successione

$2 \quad 2^5 = 32 \quad 32 \cdot 4 = 144 \quad 144 + 3 = 147 \quad 147 + 3 = 150 \quad \ldots$

Qual è la probabilità che nella successione compaia il numero 2026 sapendo di aver usato l'operazione "moltiplicare per il fattore 4" non più di una volta? [*Dare come risposta il numero di divisori del denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*] ✎: 0003

19. Nel triangolo *Carlo Càssola*

Nel triangolo ABC, il lato AB è lungo 17 m, il lato BC è lungo 26 m, e il lato CA è lungo 25 m. Traccia una circonferenza con centro sul lato BC, tangente agli altri due lati. Quanto vale il suo raggio in mm? ✎: 9999

20. Sei sui dadi *Sandro Campigotto*

Andrea lancia un dado ed ottiene un 6, poi si allontana dalla stanza. Barbara lancia altri due dadi sullo stesso tavolo, non guarda il risultato ottenuto ed esce dalla stanza. Carlo entra nella stanza e copre un dado a caso. I due dadi rimasti sul tavolo mostrano entrambi la faccia 6. Qual è la probabilità che il dado coperto abbia valore 6? [*Dare come risposta la probabilità moltiplicata per* 10000.] ✎: 0625

21. Rapporto *Matteo Littardi*

Dati un icosaedro e un dodecaedro regolari con lo stesso lato, taglia il primo con un piano passante per il centro e ortogonale al segmento che congiunge due vertici opposti. Taglia il secondo con un piano passante per il centro e parallelo a una faccia. Qual è il rapporto tra il perimetro della prima sezione e il perimetro della seconda? [*Dare come risposta il rapporto moltiplicato per* 1000.] ✎: 1291

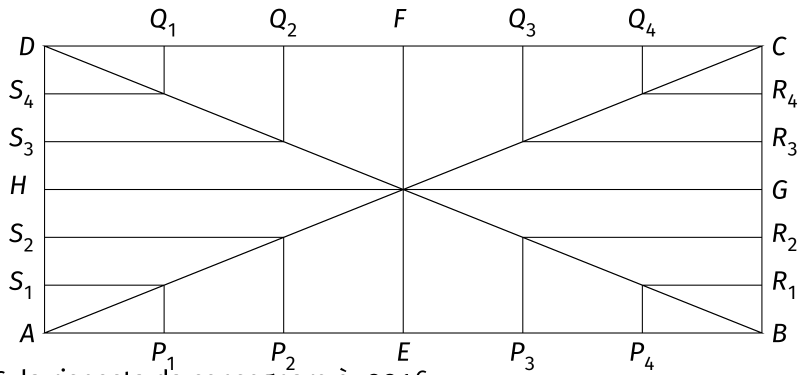
Gara di matematica a squadre miste 2025
Soluzioni

Soluzione del problema 1. I gruppi possibili di interruttori su ON sono $\binom{8}{4} = 70$. La risposta corretta è 142. Dato che ⟡ ha calcolato 7, la risposta da consegnare è `0135`.

Soluzione del problema 2. Prima della $(2n+1)$-esima riga, sono stati scritti $n(2n+1)$ numeri. Il numero all'inizio della $(2n+1)$-esima riga è il $2n^2+n+1$-esimo, cioè $2(2n^2+n+1)-1 = 4n^2+2n+1$. La risposta corretta è 9313. Dato che ⟡ ha calcolato 9313, la risposta da consegnare è `0000`.

Soluzione del problema 3. Sia $l\,\mathrm{cm}$ la misura (intera) dello spigolo della base quadrata del parallelepipedo. Il volume risulta $l^2(p^2+p+4)$, che deve essere un quadrato perfetto; dunque p^2+p+4 deve essere un quadrato perfetto. Si osservi che $p^2 < p^2+p+4 < (p+2)^2$ per ogni numero intero $p > 0$. Perciò i valori da analizzare sono: $p = 0$ e $p^2+p+4 = (p+1)^2$, ossia $p = 0$ e $p = 3$: entrambi sono possibili. Le altezze possono essere 4 e 16. La risposta corretta è 20. Dato che ⟡ ha calcolato 84, la risposta da consegnare è `0064`.

Soluzione del problema 4. La figura che si ottiene è disegnata a fianco. Ciascuno degli otto spicchi triangolari con un vertice nel centro del rettangolo, un altro vertice in un punto medio e il terzo in un vertice del rettangolo contiene 3 triangoli. Ci sono anche 4 triangoli rettangoli formati da due lati e una diagonale. Infine ci sono 4 triangoli isosceli formati da un lato e due (metà) diagonali.



La risposta corretta è 32. Dato che ⟡ ha calcolato 16, la risposta da consegnare è `0016`.

Soluzione del problema 5. $246246 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 41$. La risposta corretta è 64. Dato che ⟡ ha calcolato 48, la risposta da consegnare è `0016`.

Soluzione del problema 6. Si calcola $\frac{1}{26} = 0{,}0\overline{384615}$. Dato che la somma $3+8+4+6+1+5 = 27$ e $\left\lfloor \frac{3000}{27} \right\rfloor = 111$, si prendono almeno 111 gruppi di sei cifre del periodo che danno come somma 2997. Sono in totale $6 \cdot 111 = 666$ cifre a cui si può aggiungere proprio un'ulteriore cifra 3. Il valore massimo si ottiene aggiungendo la cifra 0 dell'antiperiodo. Perciò si prendono tutte le cifre a iniziare subito dopo la virgola, fino alla cifra 3 della 112-esimo gruppo del periodo. La risposta corretta è 668. Dato che ⟡ ha calcolato 333, la risposta da consegnare è `0335`.

Soluzione del problema 7. $630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. Le terne di numeri tali che $630 = a \cdot b \cdot c$ con $a \le b \le c$ sono così suddivisi:
per $a = 1$ sono 12, la metà del numero di divisori di 630 che è $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 24$;
per $a = 2$ sono 5, la metà del numero dei divisori di 315, diversi da 1 e 315, che è $3 \cdot 2 \cdot 2 - 2 = 10$;
per $a = 3$ sono 6, la metà del numero dei divisori di 210, diversi da 1, 2, 105 e 210, che è $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 - 4 = 12$;
per $a = 5$ sono 3, la metà del numero dei divisori di 126, diversi da 1, 2, 3, 42, 63 e 126, che è $2 \cdot 3 \cdot 2 - 6 = 6$;
per $a = 6$ sono 1, la metà del numero dei divisori di 105, diversi da 1, 3, 5, 21, 35 e 105, che è $2 \cdot 2 \cdot 2 - 6 = 2$;
per $a = 7$ sono 1, la metà del numero dei divisori di 90, diversi da 1, 2, 3, 5, 6, 15, 18, 30, 45 e 90, che è $2 \cdot 3 \cdot 2 - 10 = 2$.
La risposta corretta è 28. Dato che ⟡ ha calcolato 48, la risposta da consegnare è `0020`.

Soluzione del problema 8. Sia A lo spettatore che entra sedendosi a caso nella prima poltrona libera che vede senza controllare il biglietto. Siano poi nell'ordine B, C e D gli altri tre spettatori.
La probabilità richiesta è che D sieda al posto indicato dal suo biglietto che avviene nei seguenti casi:

- A siede al suo posto (così tutti gli altri siedono al posto corretto);
- A siede al posto di B, B siede al posto di A, gli altri siedono al posto corretto;
- A siede al posto di B, B siede al posto di C, C siede al posto di A;
- A siede al posto di C, B siede al suo posto, C siede al posto di A.

La probabilità è $\frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ La risposta corretta è 5000. Dato che ⟡ ha calcolato 9375, la risposta da consegnare è `4375`.

Soluzione del problema 9. Analizzando i vari casi, si osserva che i percorsi possibili sono sempre quadrati di lato 2 (che passano quindi per 8 punti). Inoltre, se due percorsi diversi si incrociano in un punto, in tale punto devono avere direzioni diverse.
I punti a coordinate intere all'interno della circonferenza sono 25; le direzioni di partenza da un punto sono 4. Perciò le scelte totali sono $25 \cdot 4 = 100$.
Dato che nei quattro punti a coordinate una zero, l'altra un'unità (positiva o negativa), le regole prevedono una svolta, ci sono quattro percorsi che passano per $(0,0)$, sempre punto medio di uno dei lati. Perciò le scelte che determinano questi quadrati sono $8 \cdot 4 = 32$.

La probabilità è $\frac{32}{100}$ da cui la risposta. La risposta corretta è 3200. Dato che ha calcolato 833, la risposta da consegnare è `2367`.

Soluzione del problema 10. Dato che $2025 = 19 \cdot 106 + 11$ i multipli di 19 sono 106.
I numeri che contengono la sequenza 19 minori di 2000 sono 1 tra quelli a due cifre, $9 + 10 = 19$ tra quelli a tre cifre, e $10 + 10 + 100 - 1 = 119$ tra quelli a quattro cifre: in totale 139. Maggiore di 2000 c'è soltanto 2019.
Tra questi, ce ne sono 9 che sono anche multipli di 19:

$$19 \quad 190 \quad 1197 \quad 1900 \quad 1919 \quad 1938 \quad 1957 \quad 1976 \quad 1995.$$

La risposta corretta è 237. Dato che ha calcolato 114, la risposta da consegnare è `0123`.

Soluzione del problema 11. Sia x il numero prima del primo zero e y il numero dopo il terzo zero: si noti subito che x non contiene cifre 0. Innanzi tutto osserviamo che, per ottenere un rettangolo, deve essere $p = 90^2 = (5^2) \cdot (3^4) \cdot (2^2)$.
Si considerino per iniziare i numeri del tipo _ _ _00_0_. Siccome il prodotto tra x e y deve dare 8100 si ha che x e y devono essere ottenuti come prodotto dei fattori primi in cui si è scomposto 8100. Segue che y può essere solamente uguale a 2, 3, $2^2 = 4$, 5, $3 \cdot 2 = 6$, $3^2 = 9$. Ma y non può essere 9 perché non può essere $x = \frac{8100}{9} = 900$, e non può essere 6 perché $\frac{8100}{6} = 1350$ di quattro cifre; cosí non può nessuno dei numeri minori. Perciò non esistono rettangoli generati a partire da numeri del tipo _ _ _00_0_, e neppure, a maggior ragione, da numeri del tipo del tipo _ _00_ _0_ e del tipo _00_ _ _0_, così come le situazioni simmetriche: ad esempio _0_ _ _00_. Il caso di numeri del tipo _ _00_0_ _ si elimina facilmente perché l'unica coppia di fattori a due cifre è $x = 90 = y$, ma l'ultima cifra di x deve essere diversa da 0.
Rimangono quei numeri di otto cifre dove le prime tre cifre 0 sono a separazione 1: sono del tipo _ _ _ _000_, _ _ _000_ _, _ _000_ _ _ e _000_ _ _ _. Dato che $8100 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2$, tutte le coppie di numeri x e y con $x = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ dove $a \neq 0$ e $c \neq 0$ non sono appropriate. Il controllo finale produce le seguenti simmetriche

$$(12, 675) \quad (225, 36) \quad (25, 324) \quad (324, 25) \quad (36, 225) \quad (675, 12)$$

perché nessuna cifra 0 compare in uno dei fattori, e le seguenti asimmetriche

$$\begin{array}{cccccccc} (135,60) & (15,540) & (162,50) & (1,8100) & (18,450) & (2,4050) & (27,300) & (3,2700) \\ (4,2025) & (45,180) & (5,1620) & (54,150) & (6,1350) & (75,108) & (81,100) & (9,900) \end{array}$$

La condizione che la cifra 0 non compaia in ultima posizione riduce queste a 2. La risposta corretta è 8. Dato che ha calcolato 60, la risposta da consegnare è `0052`.

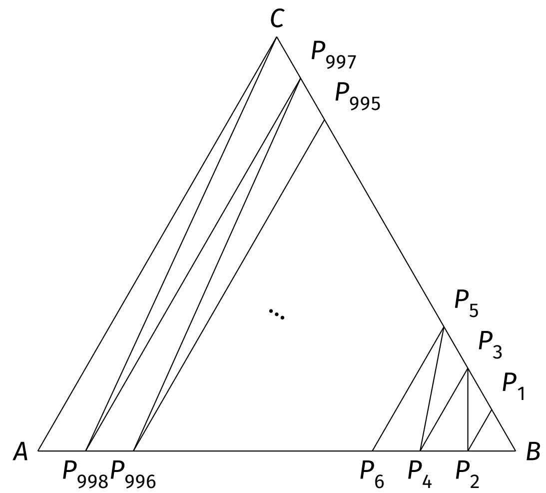
Soluzione del problema 12. Sia D uno dei tre dadi. Se il numero su D é 1, la probabilità che questo sia la somma degli altri due è $\frac{0}{36}$. Se il numero su D è 2, la probabilità è $\frac{1}{36}$. Se il numero su D è 3, la probabilità è $\frac{2}{36}$. Se il numero su D è 4, la probabilità è $\frac{3}{36}$. Se il numero su D è 5, la probabilità è $\frac{4}{36}$. Se il numero su D è 6, la probabilità è $\frac{5}{36}$.
Ogni numero su D esce con probabilità $\frac{1}{6}$. Quindi, in totale, la probabilità è $3\frac{1}{6}\frac{15}{36} = \frac{5}{24}$, dato che i casi per i tre dadi sono tra loro mutuamente esclusivi. La risposta corretta è 2083. Dato che ha calcolato 693, la risposta da consegnare è `1390`.

Soluzione del problema 13. La seconda condizione espressa per $n + 1$ produce

$$a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n + (n+1)a_{n+1} = (n+1)(n+2)a_{n+1},$$

Perciò $a_{n+1} = (n+2)a_{n+1} - na_n$ da cui si ottiene più semplicemente $na_n = (n+1)a_{n+1}$. Per induzione si trova immediatamente che $a_n = \frac{2a_2}{n}$. Ma, per la seconda condizione, stavolta espressa per 2, si ha che $a_2 = \frac{1}{4}$. Quindi $a_n = \frac{1}{2n}$. La risposta corretta è 4050. Dato che ha calcolato 1, la risposta da consegnare è `4049`.

Soluzione del problema 14. Sia x la lunghezza di AP_{998}, sia a l'area del triangolo BP_1P_2. Il triangolo $AP_{998}C$ ha area 999 a e il triangolo BCP_{998}, somma dei primi 998 triangoli, ha area a + 2 a + ... + 998 a = $499 \cdot 999$ a. Poiché i due triangoli hanno altezze uguali, $P_{998}B = 499AP_{998} = 499x$; dunque il lato AB del triangolo equilatero è lungo $x + 499x = 500x$. Consideriamo i triangoli BP_1P_2 e $P_1P_3P_2$: hanno stessa altezza e il secondo ha area doppia del primo. Pertanto, fissato $\ell = BP_1$, si ha che $P_1P_3 = 2\ell$. Consideriamo poi i triangoli BP_3P_4 e $P_4P_3P_5$; essi hanno la stessa altezza e il secondo ha area uguale ai $\frac{2}{3}$ del primo.
Pertanto $P_3P_5 = \frac{2}{3}P_3B = \frac{2}{3}3\ell = 2\ell$. Analogamente si dimostra che tutti i segmenti in cui è diviso BC, ad esclusione di BP_1, sono lunghi 2ℓ. Perció $BC = \ell + 499 \cdot 2\ell = 999\ell$, cioè $BC = 999 \cdot 20\,\mathrm{m}$. Poiché il triangolo ABC è equilatero, si trova che $500x = 999 \cdot 20\,\mathrm{m}$, e $AP_{998} = x = \frac{999 \cdot 20}{500}\,\mathrm{m} = \frac{999}{25}\,\mathrm{m}$.



La risposta corretta è 3996. Dato che ha calcolato 8, la risposta da consegnare è `3988`.

Soluzione del problema 15. Dato che la condizione richiede un controllo sulla notazione decimale e la somma da considerare è minore di 40, conviene studiare le successioni di numeri a due cifre in base al resto modulo 6 della loro somma (conviene scriverli con 0 ridondanti, per il passaggio successivo):

somma $\pmod 6$																		
0	00	06	15	24	33	39	42	48	51	57	60	66	75	84	93	99		
1	01	07	10	16	25	34	43	49	52	58	61	67	70	76	85	94		
2	02	08	11	17	20	26	35	44	53	59	62	68	71	77	80	86	95	
3	03	09	12	18	21	27	30	36	45	54	63	69	72	78	81	87	90	96
4	04	13	19	22	28	31	37	40	46	55	64	73	79	82	88	91	97	
5	05	14	23	29	32	38	41	47	50	56	65	74	83	89	92	98		

Ogni riga della tabella si costruisce rapidamente a partire dai primi numeri che producono somme a cui, sottraendo il resto, si ottiene 0, 6, 12, 18 e scrivendo i numeri di due cifre congrui a questi modulo 9—si deve ovviamente fare attenzione quando, nella sequenza, la cifra delle unità diventa 0. Ciascuna consiste di 16, 17, o 18 numeri.
Infine, per produrre un numero di quattro cifre, è necessario e sufficiente accoppiare due numeri in tabella: uno congruo a $n \pmod 6$; l'altro congruo a $6 - n \pmod 6$. In totale, sono $16^2 + 16^2 + 17^2 + 18^2 + 17^2 + 16^2 = 1670$.
La risposta corretta è 1670. Dato che ha calcolato 1666, la risposta da consegnare è `0004`.

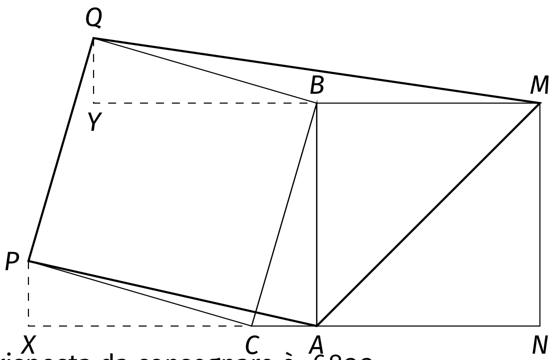
Soluzione del problema 16. I primi termini della succesione sono $3, 1, 1, -1, 3, 5, -1, 7, 9, -5, 19, 29, -9, 47, 65$. Dimostriamo che $a_{3n+1} > 0$, $a_{3n+2} > 0$ e $a_{3n+3} < 0$ per ogni numero naturale n. La base induttiva è evidente. Supponiamo così che la proprietà valga per m: dunque $a_{3m+4} = a_{3m+2} - 2a_{3m+3} > 0$ e $a_{3m+5} = a_{3m+4} - 2a_{3m+3} > a_{3m+4}$ dato che $a_{3m+3} < 0$. Quindi $a_{3m+6} = a_{3m+5} - 2a_{3m+4} = -a_{3m+2} < 0$.
Si noti ora che $a_{3n+9} = -a_{3n+5} = a_{3n+6} + 4a_{3n+3}$. Ne segue che la successione $b_n := -a_{3(n+1)}$ verifica la definizione per induzione

$$\begin{cases} b_0 = 1 \\ b_1 = 1 \\ b_{n+2} = b_{n+1} + 4b_n \end{cases}$$

Dato che $b_{n+1} = a_{3n+2}$, si ha anche che $a_{3n+4} = b_{n+1} + 2b_n$. Il calcolo di a_{100} si ottiene calcolando i due valori b_{33} e b_{32}, in effetti basta calcolare i loro valori modulo 10^4, che sono 6609 e 7805 rispettivamente, e $6609 + 2 \cdot 7805 = 2219 \pmod{10^4}$.
La risposta corretta è 2219. Dato che ha calcolato 603, la risposta da consegnare è `1616`.

Soluzione del problema 17. Siano $a = BC$, $b = AC$ e $c = AB$. Si traccino l'altezza QY del triangolo BMQ relativa alla base BM e l'altezza PX del triangolo APC relativa alla base AC. I triangoli BQY e CPX sono uguali a ABC. Inoltre $BY = AB = BM$. L'area di $AMQP$ si calcola dunque come somma:

$$2\text{area}(ABC) + \text{area}(BQPC) + \tfrac{1}{2}AB^2 - \tfrac{1}{2}AC^2 = \\ = bc + a^2 + \tfrac{1}{2}c^2 - \tfrac{1}{2}b^2$$



La risposta corretta è 7089. Dato che ha calcolato 256, la risposta da consegnare è `6833`.

Soluzione del problema 18. Dato un intero positivo n, sia $P(n)$ la probabilità che, nella successione che inizia con n, compaia 2026, condizionata al fatto che l'operazione "moltiplicare per 4" sia stata usata al massimo una volta. Vogliamo pertanto calcolare

$$\frac{1}{9}\sum_{n=1}^{9} P(n),$$

Le tre operazioni modulo 3 sono sempre l'identità; perciò osserviamo che $P(n) = 0$ se $n \not\equiv 2026 \equiv 1 \pmod 3$. Inoltre, se l'operazione "elevare a 5" viene effettuata su un numero maggiore di 4, il numero 2026 non compare nella successione dato che $5^5 = 3125$ e le operazioni sono tutte strettamente crescenti.
Sia $n = 7$. Se non è mai stata usata l'operazione "moltiplicare per 4", allora la probabilità di aver raggiunto il numero 2026 è

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2026-7}{3}} = \frac{1}{3^{673}},$$

Se l'operazione "moltiplicare per 4" è stata usata esattamente una volta, al massimo può essere usata per ottenere 2020, in quanto questo è il più grande multiplo di 4 congruo a 1 modulo 3 inferiore a 2026. Pertanto l'operazione "moltiplicare per 4” deve essere stata eseguita come $j+1$-esima operazione, dove $0 \le j \le \dfrac{505-7}{3} = 166$. In particolare, la probabilità in questo caso è

$$\left(\frac{1}{3}\right)^j \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2020-4\cdot(7+3j)}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3^{667-3j}},$$

Pertanto

$$P(7) = \frac{1}{3^{673}} + \sum_{j=0}^{166} \frac{1}{3^{667-3j}} = \frac{1}{3^{673}} \cdot \left(1 + 3^6 \cdot \frac{3^{501}-1}{26}\right),$$

Sia $n = 4$. Se la prima operazione è stata “aggiungere 3”, allora la probabilità di aver raggiunto il numero 2026 è $P(7)$. Altrimenti, se la prima operazione è stata “moltiplicare 4”, allora la probabilità di raggiungere il numero 2026 è

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2026-16}{3}} = \frac{1}{3^{670}},$$

Infine, se la prima operazione è stata “elevare a 5”, allora la probabilità che 2026 compaia nella successione è $P(1024)$ che si calcola facilmente perchè deve essere necessariamente una successione di operazioni di “aggiungere 3”:

$$P(1024) = \left(\tfrac{1}{3}\right)^{334},$$

Riassumendo

$$P(4) = \frac{1}{3} \cdot P(7) + \frac{1}{3^{671}} + \frac{1}{3^{335}},$$

Infine sia $n = 1$. Si noti che se la prima operazione è stata “elevare a 5”, il numero non viene modificato. Se la prima operazione è “moltiplicare per 4”, allora la probabilità di aver raggiunto il numero 2026 è

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2026-4}{3}} = \frac{1}{3^{674}},$$

Pertanto

$$P(1) = \frac{1}{3} \cdot P(1) + \frac{1}{3} \cdot P(4) + \frac{1}{3^{675}},$$

cioè

$$P(1) = \frac{1}{2} \cdot \left(P(4) + \frac{1}{3^{674}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot P(7) + \frac{1}{3^{671}} + \frac{1}{3^{335}} + \frac{1}{3^{674}}\right),$$

Dunque la probabilità cercata è

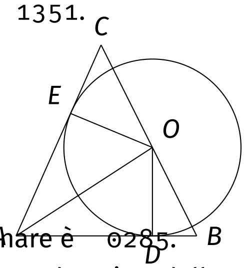
$$\begin{aligned}
\frac{1}{9} \cdot \left[P(1) + P(4) + P(7)\right] &= \frac{1}{2 \cdot 3^2} \cdot \left[\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 2\right) P(7) + \frac{1}{3^{674}} + \frac{1+2}{3^{671}} + \frac{1+2}{3^{335}}\right] \\
&= \frac{1}{2 \cdot 3^2} \cdot \left[\frac{1}{3^{672}} \cdot \left(1 + 3^6 \cdot \frac{3^{501}-1}{26}\right) + \frac{1}{3^{674}} + \frac{1}{3^{670}} + \frac{1}{3^{334}}\right] \\
&= \frac{1}{2 \cdot 3^{676}} \left(3^2 \left(1 + 3^6 \cdot \frac{3^{501}-1}{26}\right) + 1 + 3^4 + 3^{340}\right),
\end{aligned}$$

Dal momento che $3^{501} - 1 \equiv 2 \pmod 4$, il numero $\dfrac{3^{501}-1}{26}$ è dispari. Così

$$3^2 \left(1 + 3^6 \cdot \frac{3^{501}-1}{26}\right) + 1 + 3^4 + 3^{340} \equiv 1 \pmod 2$$

e il denominatore della frazione ridotta ai minimi termini è $2 \cdot 3^{676}$. Il numero di suoi divisori è quindi $677 \cdot 2 = 1354$. La risposta corretta è 1354. Dato che ha calcolato 3, la risposta da consegnare è 1351.

Soluzione del problema 19. Sia r il raggio cercato. L’area del triangolo ABC è la somma delle due aree BOA e AOC che sono $\frac{17r}{2}$ e $\frac{25r}{2}$. Secondo la formula di Erone, l’area di ABC è $\sqrt{34 \cdot 17 \cdot 8 \cdot 9} = 204$. Perciò $r = \frac{204}{21} = 9714{,}3\,\mathrm{mm}$.



La risposta corretta è 9714. Dato che ha calcolato 9999, la risposta da consegnare è 0285.

Soluzione del problema 20. Lo spazio degli esiti di questo esperimento può essere descritto dalle quadruple

$$(6, d_1, d_2, c),$$

dove 6 rappresenta il risultato del dado di Andrea, d_1, d_2 i risultati dei dadi tirati da Barbara e $c \in \{1, 2, 3\}$ il dado che viene coperto da Carlo. Per come viene svolto l'esperimento, tutti questi esiti sono tra loro equiprobabili. La probabilità cercata pertanto si calcola come rapporto fra il numero degli esiti (favorevoli) in cui tutti e tre i dadi mostrano la faccia 6 e il numero degli esiti (possibili) in cui i due dadi scoperti mostrano la faccia 6. Le quadruple favorevoli sono 3:

$$(6, 6, 6, 1), \quad (6, 6, 6, 2), \quad (6, 6, 6, 3),$$

mentre quelle possibili 13, del tipo

$$(6, 6, 6, 1), \quad (6, i, 6, 2), \quad (6, 6, j, 3),$$

La probabilità è quindi $\frac{3}{13}$. La risposta corretta è 2307. Dato che ha calcolato 625, la risposta da consegnare è `1682`.

Soluzione del problema 21. Si noti innanzitutto che, in entrambi i casi, la sezione risulta essere un decagono regolare ottenuto tagliando un antiprisma pentagonale con un piano passante per il centro e parallelo alle facce. Ricaviamo il perimetro della sezione partendo dal lato l di una delle facce di tale antiprisma.
Sappiamo che in un pentagono regolare il raggio r e l'apotema a dipendono linearmente dal lato, ossia esistono costanti α, β tali che $r = \alpha l$ e $a = \beta l$. Per motivi di simmetria l'apotema del decagono sezione è $\frac{r+a}{2} = l\frac{\alpha+\beta}{2}$. Poiché il perimetro di un poligono regolare dipende linearmente dalla sua apotema, il rapporto fra i perimetri delle sezioni non è altro che il rapporto fra i lati delle facce degli antiprismi.
Basta così osservare che, nel caso dell'icosaedro, il lato dell'antiprisma è il lato L dell'icosaedro, mentre nel caso del dodecaedro è la diagonale di una delle facce, che ha lunghezza $L\varphi$ dove $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ è il numero aureo. Quindi il rapporto cercato è $\frac{1}{\varphi}$. La risposta corretta è 618. Dato che ha calcolato 1291, la risposta da consegnare è `0673`.