Risposte numeriche

Problema	Titolo	Risposta
1	L'orologio	3927
2	L'eredità	9963
3	Quante persone?	8598
4	La torre	0018
5	I dadi	2026
6	La gatta	0826
7	Cosa accade di notte?	0048
8	L'ingranaggio	1892
9	Il ristorante	7406
10	La chiave	1546
11	L'impostore	7992
12	Il portone	0071
13	Il rapitore	1012
14	Gli androidi	5832
15	La prima sala	3538
16	La scalata	2400
17	La Mela d'Oro	4950
18	Don Pablo	6575
19	La fuga	0004
20	Il vero tesoro	1168
21	L'addio a Saint-Mystère	0093

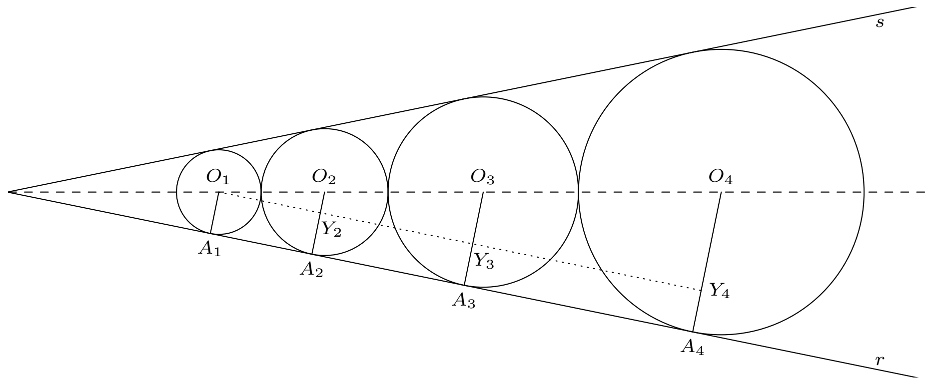
Soluzioni

1 – L'orologio (3927). La lancetta dei minuti ha una velocità angolare di $\frac{1}{10}$ di grado al secondo, mentre quella delle ore di $\frac{1}{120}$ di grado al secondo. Sia t il numero di secondi che devono passare da mezzogiorno affinché esse si sovrappongono per la prima volta: dopo questo lasso di tempo la lancetta delle ore forma con la verticale un angolo di $\frac{t}{120}$ gradi, mentre quella dei minuti forma con la verticale un angolo di $\frac{t}{10} - 360$ gradi (ne ha percorsi $\frac{t}{10}$, ma lavoriamo modulo 360 dato che la prima sovrapposizione avviene necessariamente tra l'una e le due, quando la lancetta dei minuti ha già compiuto un intero giro). Perché le lancette siano sovrapposte, questi due angoli devono essere uguali, per cui abbiamo che

$$\frac{t}{120} = \frac{t}{10} - 360 \implies t = \frac{360 \cdot 120}{11} = 3927,27 \text{ secondi.}$$

La risposta è `3927`.

2 – L'eredità (9963). Siano O_1, O_2, O_3 e O_4 i centri delle circonferenze e chiamiamo A_2 e A_3 i punti di tangenza di γ_2 e γ_3, rispettivamente, con la retta r. Infine, siano Y_2 e Y_3, rispettivamente, le intersezioni di O_2A_2 e O_3A_3 con la retta passante per O_1 parallela a r.



Le rette O_2A_2 e O_3A_3 sono parallele e i triangoli $O_1Y_2O_2$ e $O_1Y_3O_3$ sono simili. Detto r_1 il raggio di γ_1, da qui ricaviamo

$$\frac{O_1O_2}{O_1O_3} = \frac{O_2Y_2}{O_3Y_3} \implies \frac{r_1 + 24}{r_1 + 24 + 24 + 36} = \frac{24 - r_1}{36 - r_1} \implies r_1 = 16.$$

Analogamente, considerando i triangoli $O_1Y_3O_3$ e $O_1Y_4O_4$ si trova che il raggio di γ_4 è pari a 54. Il valore richiesto dal problema è dunque

$$\pi \left[16^2 + 54^2\right] = 9963,252.$$

La risposta è `9963`.

3 – Quante persone? (8598). Poniamo $x = 2023$, così possiamo riscrivere il numero sotto radice come

$$x(x+1)(x+2)(x+3) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x = \left(x^2 + 3x + 1\right)^2 - 1.$$

Concludiamo dicendo che la radice di questa quantità è compresa strettamente fra $x^2 + 3x + 1 - 1 = x^2 + 3x$ e $x^2 + 3x + 1$ e che la sua parte intera vale

$$x^2 + 3x = 2023^2 + 3 \cdot 2023 = 2026 \cdot 2023 = 4098598.$$

La risposta è `8598`.

4 – La torre (0018). Portando $\sqrt{b}$ a destra ed elevando al quadrato otteniamo

$$a = 2023 + b - 2\sqrt{2023b} \implies \sqrt{2023b} = \frac{2023 + b - a}{2}.$$

Questo mostra che $\sqrt{2023b} \in \mathbb{Q}$, cioè che $2023b$ è il quadrato di un numero razionale, ma essendo $2023b \in \mathbb{N}$, si ha necessariamente che $2023b$ è un quadrato perfetto.

Dal momento che $2023b = 17^2 \cdot 7b$, necessariamente deve valere $b = 7\beta^2$ per qualche $\beta \in \mathbb{N}$, cioè $\sqrt{b} = \beta\sqrt{7}$. Analogamente si trova che $\sqrt{a} = \alpha\sqrt{7}$ con $\alpha \in \mathbb{N}$. Poiché $\sqrt{2023} = 17\sqrt{7}$, l'equazione si riduce a

$$\alpha + \beta = 17$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, che ha ovviamente le 18 soluzioni della forma $(t, 17-t)$ per $t \in \{0, 1 \dots 17\}$.

Effettivamente per ogni $t \in \{0, 1 \dots 18\}$ si ha che $(a, b) = \big(7t^2, 7(17-t)^2\big)$ è una soluzione dell'equazione originale, quindi la risposta è `0018`.

5 – I dadi (2026). Il secondo dado riporta i numeri dispari da 1 a $2 \cdot 2024 - 1 = 4047$, per cui i possibili risultati sono tutti e soli i numeri naturali compresi fra 2 e $2024 + 4047 = 6071$. La probabilità di uscita di un risultato $r \in \{2, 3 \dots 6071\}$ è direttamente proporzionale al numero di modi possibili per scrivere r come

$$r = a + 2b - 1 \implies r - 1 = a + 2b$$

con $a, b \in \{1, 2 \dots 2024\}$. Mostriamo che tale numero è massimo per $r \in \{2026 \dots 4051\}$, e in questo caso vale 1012.

Fissato il valore di r, si ottiene una equazione diofantea lineare che si può risolvere con i metodi classici. In particolare, se r è pari una soluzione particolare è $\big(1, \frac{r}{2} - 1\big)$, e la soluzione generale ha la forma

$$(a, b) = \left(2t + 1, \frac{r}{2} - t - 1\right) \qquad t \in \mathbb{Z},$$

mentre se r è dispari una soluzione particolare è $\big(0, \frac{r-1}{2}\big)$ e la soluzione generale ha la forma

$$(a, b) = \left(2t, \frac{r-1}{2} - t\right) \qquad t \in \mathbb{Z}.$$

Determiniamo ora, in funzione di r, per quali valori di t si ottiene una soluzione valida al nostro problema (bisogna avere $a, b \in \{1, 2 \dots 2024\}$).

- Se r è pari abbiamo il sistema di disuguaglianze

  $$\begin{cases} 1 \le 2t + 1 \le 2024 \\ 1 \le \frac{r}{2} - 1 - t \le 2024 \end{cases} \implies \begin{cases} 0 \le 2t \le 2023 \\ r - 4050 \le 2t \le r - 4 \end{cases} \implies \max\{0, r-4050\} \le 2t \le \min\{2023, r-4\}.$$

  Dato che $2t$ è pari, questo equivale ad affermare

  $$\max\{0, r - 4050\} \le 2t \le \min\{2022, r - 4\}.$$

  Per massimizzare il numero di valori possibili per t dobbiamo quindi avere $r - 4050 \le 0$ e $r - 4 \ge 2022$, o in altre parole $2026 \le r \le 4050$. In questo caso tale numero vale $1 + \frac{2022-0}{2} = 1012$.

- Se r è dispari abbiamo il sistema di disuguaglianze

  $$\begin{cases} 1 \le 2t \le 2024 \\ 1 \le \frac{r-1}{2} - t \le 2024 \end{cases} \implies \begin{cases} 1 \le t \le 2024 \\ r - 4049 \le 2t \le r - 3 \end{cases} \implies \max\{1, r - 4049\} \le 2t \le \min\{2024, r - 3\}.$$

  Dato che $2t$ è pari, questo equivale ad affermare che

  $$\max\{2, r - 4049\} \le 2t \le \min\{2024, r - 3\}.$$

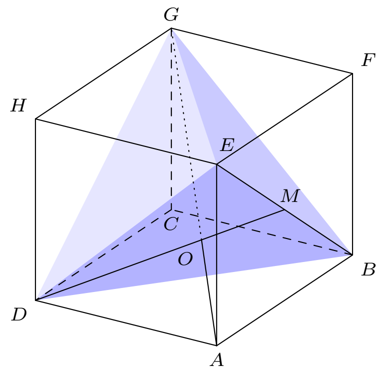
  Per massimizzare il numero di valori possibili per t dobbiamo quindi avere $r - 4049 \le 2$ e $r - 3 \ge 2024$, o in altre parole $2027 \le r \le 4051$. In questo caso tale numero vale $1 + \frac{4050-2028}{2} = 1012$.

In definitiva, la diofantea ha (a prescindere dalla parità di r) al massimo 1012 soluzioni, e questo avviene se e solo se

$$r \in \{2026, 2027 \dots 4051\}.$$

Tale insieme contiene $4051 - 2025 = 2026$ numeri, quindi la risposta è `2026`.

6 – La gatta (0826).

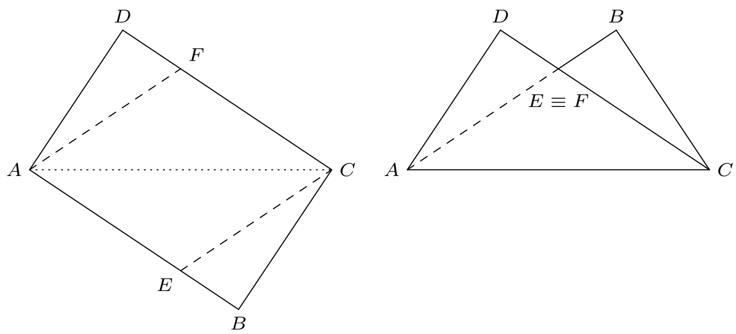


Il tetraedro $BDEG$ è regolare perché tutti i suoi lati sono diagonali di facce opportune del cubo. La retta AG contiene l'altezza uscente da G relativamente a questo tetraedro. Si può quindi notare che essa interseca la base BDE nel suo centro O. Il problema si riduce a calcolare la distanza di O dal lato BE (che sappiamo essere lungo $2025\sqrt{2}$ essendo diagonale di $ABEF$): questa distanza è un terzo dell'altezza uscente da D nel triangolo, che a sua volta è lunga $2025\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$. La soluzione è

$$\frac{1}{3} \cdot 2025\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 826,5537.$$

La risposta è `0826`.

7 – Cosa accade di notte? (0048).



Sia $ABCD$ il foglio, e siano E e F i punti sui lati AB e CD, rispettivamente, che si sovrappongono durante la piega. Sia x l'area di ACF e y l'area di AFD. Dal problema sappiamo che $128 = 2x + 2y = AD \cdot (AE + EB)$ e che $88 = x + 2y = \frac{1}{2}AD \cdot (AE + EB) + \frac{1}{2}AD \cdot DF$. Inoltre i segmenti AE e AF si sovrappongono durante la piega, per cui $AE = AF$. Possiamo allora risolvere il sistema

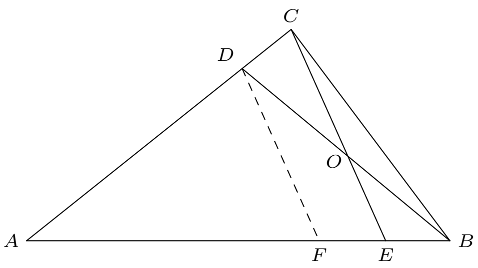
$$\begin{cases} AD \cdot AE + AD \cdot EB = 128 \\ AD \cdot AE + AD \cdot EB + AD \cdot DF = 176 \\ AF = AE \\ AD^2 + DF^2 = AF^2 \end{cases}$$

nel modo seguente: dalla prima e dalla seconda ricaviamo $AD \cdot DF = 176 - 128 = 48$ e $AD \cdot AE = 128 - 48 = 80$, mentre dalla terza e dalla quarta equazione ricaviamo $AD^2 + DF^2 = AE^2$. Moltiplicando ambo i membri di quest'ultima relazione per AD^2 otteniamo

$$AD^4 + (AD \cdot DF)^2 = (AD \cdot AE)^2 \implies AD^4 = 80^2 - 48^2 = 4096 = 8^4.$$

Da qui abbiamo $AD = 8$, e di conseguenza $AE = \frac{80}{8} = 10$ e $DF = \frac{48}{8} = 6$. Il perimetro del foglio è allora $2(8 + 10 + 6) = 48$. La risposta è `0048`.

8 – L'ingranaggio (1892).



Sia F un punto su AB tale che DF e CE siano parallele. Per Talete sulle rette AC e AE abbiamo

$$\frac{AF}{FE} = \frac{AD}{DC} = 20.$$

Sappiamo anche che $AF + FE = AE = 24EB$, da cui segue in particolare che $FE = \frac{24}{21}EB$. Per Talete sulle rette BF e BD abbiamo

$$\frac{DO}{OB} = \frac{FE}{EB} = \frac{24}{21}.$$

Il triangolo BCD ha area pari a un ventunesimo di quella di ABC (le altezze uscenti da B coincidono e $AC = 21DC$. Inoltre il triangolo COB ha area pari a $\frac{1}{1+\frac{24}{21}} = \frac{7}{15}$ di quella di BCD (le altezze uscenti da C coincidono e $OB = \frac{7}{15}DB$). Dunque l'area di COB vale

$$[COB] = \frac{7}{15} \cdot \frac{1}{21} \cdot 2025 = 45$$

e possiamo scrivere che

$$[ABC] = [COB] + [AEC] + [ABD] - [ADOE] \implies$$
$$\implies [ADOE] = [COB] + [AEC] + [ABD] - [ABCD] = 45 + \frac{24}{25} \cdot 2025 + \frac{20}{21} \cdot 2025 - 2025 = 1892,571.$$

La risposta è `1892`.

9 – Il ristorante (7406). Notiamo che i numeri b_0 e c_0 detti da Layton e Crostin rispettivamente sono numeri della forma 2^k e 2^{k+1}. Il gioco prosegue nel modo seguente:

a_n	b_n	c_x
	2^k	2^{k+1}
$3 \cdot 2^{k-1}$	2^{k-1}	$3 \cdot 2^{k-1}$
2^k	2^{k-1}	2^k

Dopo sei numeri troviamo perciò che la sequenza si ripete con gli esponenti diminuiti di uno. Il primo numero non intero sarà detto da Luke quando $k = 0$, e sarà il primo numero della $(n+1)$ – esima ripetizione del pattern (contando come prima ripetizione quella che inizia con a_1). Dato che il pattern dura sei turni, la quantità di numeri interi detti sarà pari a $6 \cdot 1234 + 2 = 7406$. La risposta è `7406`.

10 – La chiave (1546). Ovviamente c'è un modo solo per posizionare zero torri. Sia $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$: calcoliamo il numero di modi di posizionare esattamente k torri sulla scacchiera. Per farlo dobbiamo scegliere k righe e k colonne fra 5 dove posizionarle (possiamo farlo in $\binom{5}{k}^2$ modi) e poi scegliere, fra le k^2 caselle selezionate, dove mettere le torri: affinché non si controllino a vicenda deve essere scelta una casella per riga e una per colonna. In particolare ci sono k possibilità per la casella sulla prima riga selezionata, $(k-1)$ per quella sulla seconda, $(k-2)$ per quella sulla terza e così via. Per cui, in tutto per posizionare k torri abbiamo $k! \cdot \binom{5}{k}^2$ possibilità. Al variare di k abbiamo

$$\sum_{k=1}^{5} k! \cdot \binom{5}{k}^2 = 25 + 200 + 600 + 600 + 120 = 1545$$

possibilità totali. Aggiunto l'unico modo per posizionare zero torri otteniamo `1546`.

11 – L'impostore (7992). Supponiamo $m = \overline{abcdefghij}$. Nel calcolare $s(m)$, ogni cifra viene usata una volta come unità, una come decine e una come centinaia, con l'eccezione di a (usata solo come centinaia), di b (non usata come unità), di i (non usata come centinaia) e di j (usata solo come unità). Abbiamo dunque che

$$\begin{aligned} s(m) &= 100a + 110b + 111c + 111d + 111e + 111f + 111g + 111h + 11i + j \\ &= 111(c + d + e + f + g + h) + 110b + 100a + 11i + j. \end{aligned}$$

Il massimo valore per $s(m)$ si ottiene quando $j = 0$, $i = 1$, $a = 2$ e $b = 3$, e vale

$$111(4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) + 110 \cdot 3 + 100 \cdot 2 + 11 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 4870.$$

Seguendo un ragionamento simile, il minimo per $s(m)$ si ottiene quando $j = 9$, $i = 8$, $a = 7$ e $b = 6$, e vale

$$111 \cdot (5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0) + 110 \cdot 6 + 100 \cdot 7 + 11 \cdot 8 + 1 \cdot 9 = 3122.$$

La risposta è $4870 + 3122 = 7992$.

12 – Il portone (0071). Notiamo che le carte diverse da assi e jolly possono non essere considerate: la probabilità richiesta non dipende dalla loro posizione nel mazzo. Inoltre i semi degli assi sono altrettanto ininfluenti. Consideriamo quindi il problema analogo in cui il mazzo è costituito solamente da quattro assi senza semi e dai quattro jolly: abbiamo $\binom{8}{4} = 70$ disposizioni possibili delle carte di questo mazzo.

La situazione descritta nel testo si verifica solo se nell'ordine si presentano prima i quattro assi e poi i quattro jolly: pertanto abbiamo un'unica disposizione favorevole. Ne discende quindi che la probabilità richiesta è di $\frac{1}{70}$, e quindi la risposta è $1 + 70 = 0071$.

13 – Il rapitore (1012). Rappresentiamo il gioco muovendo una pedina su una griglia di $(a + 1) \times (b + 1)$ caselle, indicizzate progressivamente a partire da 0: se la pedina si trova sulla casella (s, t) intendiamo che le pile contengono rispettivamente s e t monete.

Le regole del gioco originale diventano le seguenti;

- Ogni giocatore può spostare la pedina di quante caselle desidera verso sinistra o verso il basso, oppure può spostarla di una casella verso sinistra ed una verso il basso. In nessun caso può uscire dai bordi della griglia.
- Vince il giocatore che riesce a posizionare la pedina sulla casella $(0, 0)$.

Chiamiamo *vincenti* le caselle corrispondenti alle coppie (a, b) per le quali Luke ha una strategia vincente, e *perdenti* le altre. Allora notiamo che:

- $(0, 0)$ è una casella perdente.
- Se (s, t) è una casella perdente, allora tutte le caselle della forma $(s + k, t)$ e $(s, t + k)$ con $k > 0$ sono vincenti. Analogamente anche $(s+1, t+1)$ è una casella vincente (la strategia vincente consiste in entrambi i casi nel muovere la pedina nella casella (s, t)).
- Una casella è perdente se e solo se non si può, partendo da quella casella, muovere su una casella perdente.

Ad esempio, tutte le caselle della forma $(0, k)$ e $(k, 0)$ con $k > 0$ sono vincenti, così come la casella $(1, 1)$. Invece, la casella $(2, 1)$ e la casella $(1, 2)$ sono perdenti: da esse non si può raggiungere una casella vincente in una sola mossa.

Ne deduciamo che le caselle della forma $(2, k + 1)$ e $(k + 1, 2)$ con $k > 0$ sono vincenti. Ma allora la casella $(3, 3)$ è perdente: infatti da essa non si possono raggiungere caselle vincenti con una sola mossa.

Procedendo nello stesso modo si trova che le caselle perdenti sono tutte e quelle che si possono scrivere in una delle tre forme

$$(3m, 3m) \qquad (3m + 1, 3m + 2) \qquad (3m + 2, 3m + 1)$$

per qualche valore di $m \in \mathbb{N}$.

Una coppia del primo tipo può presentarsi all'inizio della partita se e solo se

$$0 \le 3m + 3m \le 2024 \implies 0 \le 6m \le 2024;$$

poiché m deve essere intero ciò significa $m \in \{0, 1 \ldots 337\}$.

Una coppia del secondo tipo può presentarsi all'inizio della partita se e solo se

$$0 \leq 3m+1+3m+2 \leq 2024 \implies 0 \leq 6m+3 \leq 2024,$$

e poiché m deve essere intero ciò significa $m \in \{0, 1 \dots 336\}$. Analogamente una coppia del terzo tipo si può presentare se e solo se $m \in \{0, 1 \dots 336\}$.

Il totale di posizioni perdenti compatibili con le regole è quindi

$$338 + 337 + 337 = 1012.$$

La risposta è `1012`.

14 – Gli androidi (5832). Notiamo che un androide funzionante che dichiara "fra i miei due vicini esattamente uno va riparato" ha come vicini due androidi di tipo diverso. Invece, un androide debole che fa la stessa affermazione ha come vicini due androidi dello stesso tipo.

Se nessuno degli androidi presenti è funzionante, ogni numero $n \in \{3, 4 \dots 5000\}$ di androidi attorno alla tavola è compatibile con il testo (ognuno ha due vicini dello stesso tipo, ed è in effetti debole).

Se invece c'è un androide funzionante, esso avrà come vicini un androide funzionante e un androide debole: possiamo allo stesso modo dedurre i tipi degli altri androidi attraverso la considerazione fatta all'inizio. Abbiamo quindi una configurazione della forma

$$\dots \quad D \quad F \quad F \quad D \quad F \quad F \quad D \quad F \quad F \quad \dots$$

dove D sta per androide debole e F sta per androide funzionante. La configurazione è quindi compatibile con il testo se e solo se attorno alla tavola ci sono $3k$ androidi, di cui $2k$ funzionanti e k deboli. Dal testo sappiamo che $k \geq 1$ e che $2k \leq 5000$ (cioè $k \in \{1, 2 \dots 2500\}$).

In definitiva, il numero di androidi attorno alla tavola è compreso fra 3 e 5000 (per un totale di 4998 possibilità), oppure è un multiplo di 3 compreso fra 5001 e 7500 (per un totale di $\lceil \frac{7500-5000}{3} \rceil = 834$ possibilità). La risposta è $4998 + 834 =$ `5832`.

15 – La prima sala (3538). Notiamo che una terna di isole soddisfa la richiesta del problema se e solo se le tre isole sono i vertici di un triangolo ottusangolo. Dobbiamo quindi calcolare la probabilità che, scelti tre vertici casuali di un $2024-$gono regolare, essi definiscano un triangolo ottusangolo.

Sia A un vertice del $2024-$gono e sia B il vertice diametralmente opposto. I triangoli ottusangoli che hanno uno dei due angoli acuti in A sono tutti e soli quelli formati da A e da due vertici X e Y che si trovano sullo stesso arco fra i due definiti da A e B. In particolare il loro numero è $2 \cdot \binom{1011}{2}$ (ognuno degli archi AB contiene $\frac{2024-2}{2} = 1011$ vertici).

Il vertice A può essere scelto in 2024 modi diversi; ripetendo lo stesso conteggio in ognuno di questi casi ogni triangolo ottusangolo viene contato *due* volte (avendo due diversi angoli acuti). Pertanto il numero totale di triangoli ottusangoli è

$$\frac{1}{2} \cdot 2024 \cdot 2 \cdot \binom{1011}{2} = 2024 \cdot \binom{1011}{2}.$$

Poiché ci sono chiaramente $\binom{2024}{3}$ modi per scegliere una terna qualunque di vertici, la probabilità richiesta è

$$\frac{2024 \cdot \binom{1011}{2}}{\binom{2024}{3}} = \frac{2024 \cdot 1011 \cdot 1010}{2} \cdot \frac{6}{2024 \cdot 2023 \cdot 2022} = \frac{1515}{2023}.$$

La risposta è $1515 + 2023 =$ `3538`.

16 – La scalata (2400). La condizione $f(f(x)) = x$ si riscrive esplicitamente in termini di a, b, c e d come

$$\frac{a\frac{ax+b}{cx+d} + b}{c\frac{ax+b}{cx+d} + d} = x \implies \frac{a^2x + ab + bcx + bd}{acx + bc + cdx + d^2} = x \implies a^2x + ab + bcx + bd = acx^2 + bcx + cdx^2 + d^2x.$$

Confrontando i termini di secondo grado in x otteniamo $0 = ac + cd = c(a+d)$; dal momento che $c \neq 0$ per ipotesi deve valere $a + d = 0 \iff a = -d$.

Inserendo la condizione $f(20) = 20$ otteniamo

$$\frac{20a + b}{20c + d} = 20 \implies 20a + b = 400c + 20d;$$

analogamente inserendo la condizione $f(28) = 28$ otteniamo $28a + b = 784c + 28d$. Dobbiamo allora risolvere il sistema

$$\begin{cases} a = -d \\ 20a + b = 400c + 20d \\ 28a + b = 784c + 28d. \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro le ultime due equazioni troviamo $8a = 384c + 8d \implies a = 48c + d$, e con l'aiuto della prima ricaviamo $d = -24c$ e $a = 24c$.

Inserendo nuovamente questi risultati ad esempio nella seconda equazione ricaviamo infine

$$480c + b = 400c - 480c \implies b = -560c.$$

La funzione $f(x)$ assume quindi la forma

$$f(x) = \frac{24cx - 560c}{cx - 24c} = \frac{24x - 560}{x - 24}.$$

Possiamo quindi calcolare

$$100 \cdot f(2024) = 100 \cdot \frac{24 \cdot 2024 - 560}{2024 - 24} = \frac{48576 - 560}{2000} = \frac{48016}{20} = 2400,8.$$

La risposta è `2400`.

17 – La Mela d'Oro (4950). Sostituiamo nella relazione data $x = y = 0$ per ottenere $f(0) = 2f(0)$, da cui $f(0) = 0$. Poi sostituiamo $y = 1$: otteniamo $f(x+1) = f(x) + x + f(1)$. Denotiamo con c il numero reale $f(1)$ e risolviamo la ricorrenza risultante

$$f(x+1) = f(x) + x + c \qquad \forall x \in \mathbb{N}.$$

L'equazione omogenea associata è $f_o(x+1) = f_o(x)$, che ha chiaramente come uniche soluzioni le costanti $f_o(x) = A$. Per trovare una soluzione particolare alla ricorrenza la cerchiamo della forma $\tilde{f}(x) = px^2 + qx + r$: sostituendo deve valere

$$p(x+1)^2 + q(x+1) + r = px^2 + qx + r + x + c \implies 2px + p + q = x + c \implies \begin{cases} 2p = 1 \\ p + q = c \end{cases}$$

Pertanto abbiamo $p = \frac{1}{2}$ e $q = \frac{2c-1}{2}$ e $r \in \mathbb{R}$. Effettivamente la funzione $\tilde{f}(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{2c-1}{2}x$ è una soluzione particolare della ricorrenza.

Ogni soluzione della ricorrenza è somma di quest'ultima e di una delle funzioni (costanti) $f_0(x)$, e quindi ha la forma

$$f(x) = f_o(x) + \tilde{f}(x) = \frac{x^2 + (2c-1)x + A}{2}.$$

Per determinare i valori di A e di c utilizziamo le condizioni $f(0) = f(2025) = 0$:

$$\begin{cases} 0^2 + (2c-1) \cdot 0 + A = 0 \\ 2025^2 + (2c-1) \cdot 2025 + A = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A = 0 \\ c = -1012 \end{cases}$$

Siamo quindi riusciti ad esplicitare la funzione incognita come

$$f(x) = \frac{x^2 - 2025x}{2}.$$

È facile allora verificare che tale funzione è una soluzione valida dell'equazione $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy$. A questo punto $f(20) = -20050$ e $f(25) = -25000$, per cui la risposta è $-20050 - (-25000) =$ `4950`.

18 – Don Pablo (6575). Dalle formule di Viéte sappiamo che

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=2023 \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0 \\ \alpha\beta\gamma=1. \end{cases}$$

Il numero λ si può riscrivere usando queste informazioni come

$$\lambda=-(\alpha\beta\gamma)^{2023}(\alpha-2024)(\beta-2024)(\gamma-2024)=(2024-\alpha)(2024-\beta)(2024-\gamma).$$

Svolgiamo il prodotto e raggruppiamo i termini dello stesso grado per ottenere

$$\lambda=2024^3-2024^2(\alpha+\beta+\gamma)+2024(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma.$$

Utilizzando ancora le formule di Viéte possiamo affermare che

$$\lambda=2024^3-2024^2\cdot 2023+2024\cdot 0-1=2024^2(2024-2023)-1=2024^2-1=4096575.$$

La risposta è `6575`.

19 – La fuga (0004). La seconda equazione si riscrive come $xy=x+y$, o alternativamente come $y=\frac{x}{x-1}$ (non abbiamo problemi di annullamento del denominatore perché per $x=1$ dovremmo avere $\frac{1}{y}=0$, impossibile). Se sottraiamo $2x^2y^2$ ad ambo i membri della prima equazione otteniamo

$$x^4-2x^2y^2+y^4=2022x^2y^2 \implies \left(x^2-y^2\right)^2=2022x^2y^2 \implies (x+y)^2(x-y)^2=2022(x+y)^2 \implies (x-y)^2=2022$$

(dividere per $x+y=xy$ è ammesso perché dalla seconda equazione sappiamo che x e y sono diversi da zero, quindi anche $xy\neq 0$). A questo punto dividiamo i casi $x-y\geq 0$ e $x-y\leq 0$.

- Se $x-y\geq 0$ abbiamo il sistema

  $$\begin{cases} x-y=\sqrt{2022} \\ y=\frac{x}{x-1} \end{cases} \implies x^2-\left(2-\sqrt{2022}\right)x+\sqrt{2022}=0.$$

  Il discriminante dell'equazione così ottenuta vale

  $$\Delta=\left(2+\sqrt{2022}\right)^2-4\sqrt{2022}=4+4\sqrt{2022}+2022-4\sqrt{2022}=2026>0,$$

  quindi ci sono due soluzioni reali distinte per x, che possiamo calcolare attraverso la formula quadratica:

  $$x_{1,2}=\frac{2-\sqrt{2022}\pm\sqrt{2026}}{2}.$$

- Se $x-y\leq 0$ abbiamo analogamente a prima il sistema

  $$\begin{cases} x-y=-\sqrt{2022} \\ y=\frac{x}{x-1} \end{cases} \implies x^2-\left(2+\sqrt{2022}\right)x-\sqrt{2022}=0.$$

  Anche in questo caso il discriminante vale

  $$\Delta=\left(2+\sqrt{2022}\right)^2-4\sqrt{2022}=4-4\sqrt{2022}+2022+4\sqrt{2022}=2026>0,$$

  quindi ci sono due soluzioni reali distinte per x:

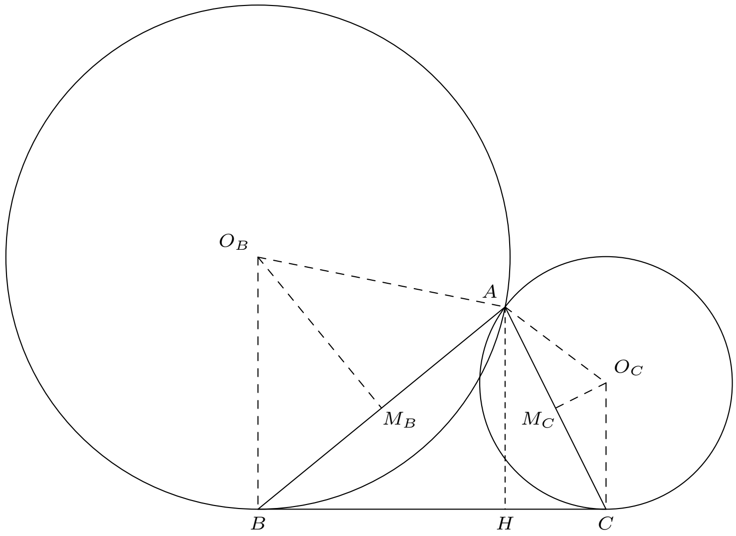
  $$x_{3,4}=\frac{2+\sqrt{2022}\pm\sqrt{2026}}{2}.$$

Possiamo quindi trovare la somma dei quattro valori così trovati:

$$\begin{aligned} &x_1+x_2+x_3+x_4= \\ &\quad=\frac{2-\sqrt{2022}+\sqrt{2026}}{2}+\frac{2-\sqrt{2022}-\sqrt{2026}}{2}+\frac{2+\sqrt{2022}+\sqrt{2026}}{2}+\frac{2+\sqrt{2022}-\sqrt{2026}}{2}=\frac{8}{2}=4. \end{aligned}$$

La risposta è `0004`.

20 – Il vero tesoro (1168). Siano O_B e O_C i centri delle circonferenze γ_B e γ_C, rispettivamente, e siano M_B e M_C i punti medi dei lati AB e AC, rispettivamente.



Il segmento AB è una corda di γ_B, quindi $O_BM_B \perp AB$. Analogamente $O_CM_C \perp AC$. Sia poi H il piede dell'altezza uscente da A: consideriamo i triangoli rettangoli ABH e O_BBM_B. Grazie alle proprietà di angoli al centro e alla circonferenza ricaviamo

$$\widehat{ABH} = \frac{1}{2}\widehat{AO_BB} = \widehat{M_BO_BB}.$$

Pertanto ricaviamo $ABH \sim O_BBM_B$, ed in particolare $O_BB = \frac{AB \cdot BM_B}{AH} = \frac{AB^2}{2AH}$. Analogamente troviamo $ACH \sim O_CCM_C$, e quindi in particolare $O_CC = \frac{AC \cdot CM_C}{AH} = \frac{AC^2}{2AH}$. Di conseguenza il prodotto dei raggi di γ_B e γ_C vale

$$O_BB \cdot O_CC = \frac{AB^2 \cdot AC^2}{4AH^2}.$$

Usando la formula trigonometrica per l'area $[ABC] = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC}$ otteniamo $AB \cdot AC = \frac{2[ABC]}{\sin \widehat{BAC}} = \frac{4[ABC]}{\sqrt{3}}$ dal momento che $\widehat{BAC} = 180° - 15° - 45° = 120°$. D'altra parte sappiamo anche che $[ABC] = \frac{1}{2}BC \cdot AH$ e quindi $AH = \frac{2[ABC]}{BC} = \frac{[ABC]}{1012}$. Inserendo queste informazioni nella relazione prima trovata ricaviamo

$$O_BB \cdot O_CC = \frac{\left(\frac{4[ABC]}{\sqrt{3}}\right)^2}{4 \cdot \left(\frac{[ABC]}{1012}\right)^2} = \frac{4 \cdot 1012^2}{3}.$$

La media geometrica richiesta è la radice di questa quantità, e quindi vale

$$\sqrt{O_BB \cdot O_CC} = \frac{2 \cdot 1012}{\sqrt{3}} = \frac{2024 \cdot \sqrt{3}}{3} = 1168,2613.$$

La risposta è `1168`.

21 – L'addio a Saint-Mystère (0093). Iniziamo con qualche considerazione preliminare.

- Per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste una potenza di 3 che abbia esattamente k cifre. Dimostriamolo per induzione su k: quando $k = 1$ abbiamo $3^0 = 1$ come potenza di 3 con esattamente una cifra.
  Supponiamo ora che esista una potenza di 3 con esattamente k cifre, e sia 3^p la più grande fra esse. Allora 3^{p+1} ha almeno $k+1$ cifre, e
  $$3^{p+1} = 3 \cdot 3^p < 10 \cdot 3^p,$$
  cioè 3^{p+1} ha al massimo $k+1$ cifre. Pertanto abbiamo costruito una potenza di 3 con esattamente $k+1$ cifre conoscendone una con esattamente k cifre.

- Fissato $k \in \mathbb{N}$, sia 3^p la più piccola potenza di 3 con esattamente k cifre. Allora 3^p inizia con la cifra 1 o con la cifra 2.
  Infatti, se 3^p iniziasse con una cifra diversa avremmo
  $$3^p \geq 3 \cdot 10^{k-1} \implies 3^{p-1} \geq 10^{k-1},$$
  cioè 3^{p-1} sarebbe una potenza di 3 con esattamente k cifre più piccola di 3^p, assurdo.
- Per ogni $p \in \mathbb{N}$, il numero 3^p ha k cifre e inizia con la cifra 1 o con la cifra 2 se e solo se il numero 3^{p+1} ha k cifre e inizia con una cifra compresa fra 3 e 8.
  Infatti abbiamo
  $$10^{k-1} < 3^p < 3 \cdot 10^{k-1} \iff 3 \cdot 10^{k-1} < 3^{p+1} < 9 \cdot 10^p.$$

Mettendo insieme queste considerazioni abbiamo che per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste una potenza 3^p con esattamente k cifre e la cui prima cifra è 1 oppure 2, e la potenza 3^{p+1} ha ancora k cifre e inizia con una cifra compresa fra 3 e 8. A questo punto ci sono due possibilità: o 3^{p+2} ha $k+1$ cifre (quindi ci sono esattamente due potenze di 3 aventi k cifre) oppure 3^{p+2} ha ancora k cifre (quindi ci sono esattamente tre potenze di 3 aventi k cifre, e una di queste tre – ovvero 3^{p+2} – necessariamente inizia con 9).

Dall'approssimazione $3^{2025} \simeq 1,48 \cdot 10^{966}$ sappiamo che 3^{2025} inizia con la cifra 1 e ha esattamente 967 cifre. Di conseguenza fra le 2025 potenze $\left\{3^0, 3^1 \ldots 3^{2024}\right\}$ ne abbiamo esattamente 966 che iniziano con le cifre 1 e 2, ed esattamente 966 che iniziano con cifre comprese fra 3 e 8. Quelle che iniziano con la cifra 9 sono le rimanenti $2025 - 966 - 966 = 93$. La risposta è `0093`.